

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. Для двух натуральных чисел A и B вычислили их сумму C и произведение D . Затем для чисел C и D нашли их сумму E и произведение F . Из чисел E и F одно оказалось нечётным. Какое именно и почему?

Решение:

Способ 1. Если оба числа A и B чётны, то чётны будут и все последующие вычисляемые цифры, в частности, оба числа E и F . Этот случай невозможен. Если оба числа A и B нечётны, то из чисел C и D одно будет чётным, а второе — нечётным. В этом случае E — нечётно, а F — чётно. Наконец, если числа A и B разной чётности, то снова одно из чисел C и D чётно, второе — нечётно, и мы перешли ко второму случаю.

Способ 2. Предположим, что нечётным оказалось число $F = C \cdot D$. Тогда оба числа C и D нечётны. Числа A и B в этом случае должны быть, с одной стороны, разной чётности (чтобы была нечётной их сумма), с другой — оба нечётными (чтобы нечётным было произведение). Противоречие. Значит, наше предположение было неверным, число F — чётно, а тогда число E — нечётно.

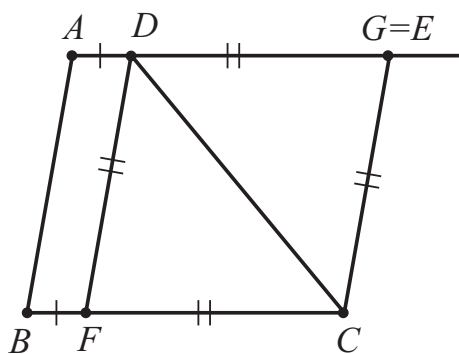
Ответ: Нечётно число E .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный ответ (то есть имеется доказательство, что число E не может быть чётным)	7 баллов
Разобраны какие-то случаи (не все) чётности чисел A и B (например, только случай, когда оба эти числа нечётны)	3 балла
На примере показано, что число E может быть нечётным (без обоснования того, что чётным оно быть не может)	1 балл
Не обоснованный или неверный ответ	0 баллов

8.2. В трапеции $ABCD$ стороны оснований AD и BC равны 1 м и 7 м соответственно, а длина AB равна 6 м. На прямой AD нашлась точка E , равноудаленная от вершин C и D . Найдите DE .

Решение: Проведём через вершину D прямую, параллельную прямой AB ; пусть она пересекает прямую BC в точке F . Также проведём через точку C прямую, параллельную прямой AB ; пусть она пересекает прямую AD в точке G — см. рисунок. Четырёхугольник $ADFB$ — параллелограмм, поэтому $DF = AB = 6$, а $BF = AD = 1$. Тогда $FC = BC - BF = 6 = FD$. Но четырёхугольник $DFCG$ —



К решению задачи 8.2

тоже параллелограмм, и так как в нём две смежные стороны равны, он является ромбом. Значит, точка G лежит на прямой AD и равноудалена от точек C и D . Этими же свойствами обладает и точка E . Но такая точка единственна: это точка пересечения прямой AD и серединного перпендикуляра к отрезку CD . Значит, $E = G$ и $DE = DG = 6$.

Ответ: $DE = 6$

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример, показывающий, что DE может равняться 6 при этом в общем случае решения нет	2 балла
Ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ	0 баллов

8.3. Существует ли такое нецелое положительное число, что 15% от него и 33% от него являются целыми числами? Ответ обосновать.

Решение: В качестве такого числа подойдёт любая дробь, знаменатель которой равен 3, а числитель кратен 100. Действительно, если $a = \frac{100m}{3}$, где m — целое, не кратное 3, число, то a — нецелое, а $0,15a = 5m$ и $0,33a = 11m$ — целые числа.

Примечание: Нетрудно доказать, что числами вида $\frac{100m}{3}$ (где m — целое, не кратное 3, число) и исчерпываются все числа, о которых идёт речь в задаче.

Ответ: существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведено хотя бы одно такое число	7 баллов
Доказано, что знаменатель дроби может равняться только числу 3 (без дальнейшего продвижения)	5 баллов
Имеются верные рассуждения о структуре искомого числа, не приведшие, однако, к решению	не больше 2 баллов
Примеры чисел (в любом количестве), не удовлетворяющих какому-то (каким-то) из условий задачи	0 баллов

8.4. Ученики одного из классов поспорили о цвете платья на фотографии. Половина класса посчитала, что оно чёрно-синее, а половина была совершенно уверена, что оно бело-золотое. После спора 10 человек поменяли свое мнение: семеро заявили, что платье всё-таки бело-золотое, а трое стали считать, что оно

чёрно-синее. Остальные учащиеся мнение своё не изменили. При этом сторонников бело-золотого варианта стало в два раза больше, чем сторонников чёрно-синего. Сколько человек учится в классе? Ответ обосновать.

Решение:

Способ 1. Пусть в классе учится x человек. До начала спора сторонников каждого варианта было поровну, по $\frac{x}{2}$ человек. После спора к сторонникам бело-золотого варианта добавились 7 учеников, заявивших, что «платье всё-таки бело-золотое», но при этом от них откололись трое, изменивших своё мнение в пользу чёрно-синего варианта; после этого в результате сторонников бело-золотого варианта стало $\frac{x}{2} + 7 - 3 = \frac{x}{2} + 4$. Это количество составляет две трети класса, то есть имеет место равенство $\frac{x}{2} + 4 = \frac{2}{3}x$. Отсюда $x = 24$.

Примечание: Разумеется, можно было следить и за сторонниками чёрно-синего варианта; при этом получится уравнение $\frac{x}{2} - 4 = \frac{1}{3}x$, которое имеет тот же корень $x = 24$.

Способ 2. Количество сторонников бело-золотого варианта по итогам спора увеличилось на $7 - 3 = 4$ человека. На столько же уменьшилось число сторонников чёрно-синей расцветки. Значит, теперь за бело-золотой вариант «голосуют» на 8 школьников больше, чем за чёрно-синий. Сторонников бело-золотого варианта сейчас ровно в два раза больше, и это значит, что за чёрно-синий вариант голосуют тоже 8 человек, а за бело-золотой — 16. Тогда всего в классе 24 человека.

Ответ: в классе учатся 24 человека.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верные рассуждения привели к неверному ответу из-за арифметической ошибки	6 баллов
Показано, что в классе может быть 24 ученика, но не обоснована единственность ответа	3 балла
Показано, что число учеников класса обязано делиться нацело и на 2 и на 3 (то есть на 6)	2 балла
Показано, что число учеников класса обязано делиться нацело на одно из чисел, 2 или 3	1 балл
Приведён только ответ (без проверки что он достижим)	0 баллов

8.5. Проплывая под мостом реки, пловец потерял флягу, однако обнаружил это только спустя 3 минуты. Он немедленно повернул обратно и догнал флягу на расстоянии в 100 м от моста. Считая, что собственная скорость пловца неизменна, определите (в км/ч) скорость течения реки.

Решение:

Способ 1. Предположим, что мы находимся на фляге пловца. Тогда течение реки действует одинаково и на нас, и на пловца, поэтому пловец и удаляется от нас, и приближается к нам с одной и той же скоростью (с собственной скоростью пловца). Значит, он движется одно и то же время и от нас, и к нам, и время это по условию 3 минуты. Итого от момента потери фляги до момента её поимки прошло 6 минут, за которые фляга, двигаясь со скоростью течения, проплыла 100 м. Тогда за час фляга проплыла бы в 10 раз больше, то есть 1000 м или 1 км. Это значит, что скорость течения равна 1 км/ч.

Способ 2. Пусть скорость течения равна x км/ч, а собственная скорость пловца равна y км/ч. Пусть также пловец поймал флягу спустя t ч после того, как её обронил. Тогда за это время фляга проплыла xt км. Имеем уравнение $xt = 0,1$. Пловец, двигаясь против течения со скоростью $y - x$, за время $1/20$ ч преодолел расстояние, равное $\frac{y - x}{20}$ км. (Мы считаем, что пловец плыл против течения реки; случай, когда он плыл по течению, получается из рассматриваемого формальной заменой x на $-x$.) Остальные $t - \frac{1}{20}$ ч он плыл по течению со скоростью $x + y$, покрыв за это время расстояние, равное $(x + y) \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right)$. Так как он оказался там же, где и фляга, имеем уравнение $(x + y) \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right) - \frac{y - x}{20} = 0,1$. Получили систему двух уравнений с тремя переменными.

$$\begin{cases} xt = 0,1 \\ (x + y) \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right) - \frac{y - x}{20} = 0,1 \end{cases}.$$

Умножив на 20 обе части второго уравнения и раскрыв скобки, получим равенство $20xt - 20yt - 2y = 2$; подставив вместо xt его значение из первого уравнения системы, и сократив получившееся уравнение на $2y \neq 0$, получим $10t = 1$, откуда $t = 0,1$. Теперь из первого уравнения находим $x = 1$.

Примечание: Значение y однозначно найти невозможно; скорость пловца может быть любой, и даже меньшей, чем скорость течения (в последнем случае пловец всё время движется в одну сторону, но с разной скоростью).

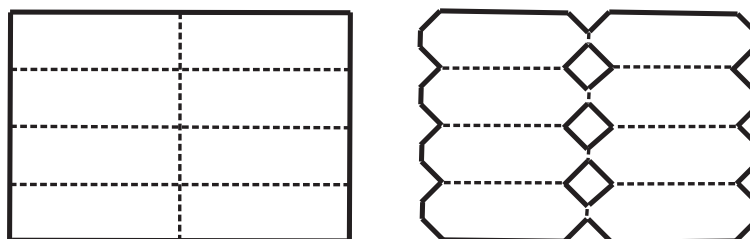
Ответ: скорость течения равна 1 км/ч.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Рассмотрен только случай когда пловец изначально двигался против течения (или только по течению)	баллы не понижать
Верные рассуждения привели к неверному ответу из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно получено уравнение (или система уравнений), из которой находится скорость течения	3 балла
Имеется идея (не доведённая до решения) перейти в систему отсчёта, связанную с флягой	2 балла
Обоснованно получено только одно из уравнений системы	1 балл
Приведён только ответ (без проверки что он достижим)	0 баллов

8.6. Аня сложила прямоугольный лист папиросной бумаги последовательно 7 раз, из них 3 раза по вертикали и 4 раза по горизонтали (каждый раз лист складывался ровно пополам). Затем она отрезала у получившегося прямоугольника все 4 угла так, как показано на рисунке, и изрезанный лист вновь 7 раз развернула. Докажите, что число образовавшихся дыр не зависит от того, в каком порядке Аня складывала бумагу, и найдите это число.

Решение: Предположим, что перед тем, как резать, Аня развернула уже сложенный лист (а потом свернула опять в том же порядке). Тогда сгибы разделили лист на равные прямоугольники (на рисунке слева изображён такой лист в случае двух вертикальных и одного горизонтального складывания).



К решению задачи 8.6

Подсчитаем число сгибов. Горизонтальные сгибы появляются только при вертикальном складывании листа; при этом с каждым новым вертикальным складыванием ширина листа уменьшается вдвое. Значит, после трёх вертикальных складываний ширина листа уменьшится в 8 раз, и на развёртке мы увидим 7 горизонтальных сгибов. Аналогично, вертикальные сгибы появляются только при горизонтальном складывании, и их количество на развёртке будет равно $2^4 - 1 = 15$. После отрезания уголков дыры появятся на месте пересечения сгибов, при этом каждой дыре будет соответствовать своя точка пересечения (на рисунке справа

показано, как выглядит изрезанный лист в случае двух вертикальных и одного горизонтального складывания). Но всего таких точек $7 \cdot 15 = 105$. Значит, на изрезанном листе будет ровно 105 дыр, и это число не зависит от того, в каком порядке осуществлялось складывание листа.

Ответ: На листе бумаги образовалось 105 дыр.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верные рассуждения привели к неверному ответу из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно обоснована независимость количества дыр от порядка складываний, но их количество не найдено	4 балла
При конкретной последовательности складываний верно определено количество дыр, но нет доказательства в общем случае	3 балла
Ответ без обоснования	1 балл